This page intentionally left blank.

ATTI

DELLA

ACCADEMIA GIOENIA

DI SCIENZE NATURALI

IN CATANIA.

ANNO XCIV

1917.

SERIE QUINTA.

VOLUME X.



CATANIA,

C. GALÀTOLA, EDITORE

1917.

Saggio di Geometria ad infinite dimensioni.

Nota di GIUSEPPE MARLETTA

Per quanto io sappia, quel poco che si conosce degli spazi ad infinite dimensioni è stato trattato analiticamente, anzi si può addirittura affermare che la Geometria entri, nei pochissimi lavori sui detti spazi, soltanto come utilità di linguaggio (*). Si noti, inoltre che lo spazio a cui si è accennato dagli analisti è ad un numero di dimensioni infinito ma numerabile.

Dal punto di vista geometrico possiamo dunque dire che nulla si sa di Geometria ad infinite dimensioni ; ho creduto quindi interessante imprenderne una trattazione sistematica, che io esporrò in varie Note via via che le mie ricerche mi daranno risultati sodisfacenti.

In questo Saggio costruiti gli spazi ad infinite dimensioni (che io chiamo *ultraspazi*) ne studio le intersezioni e l' immersione, la dualità, la perpendicolarità, la prospettività e l' omologia.

La trattazione è perfettamente analoga a quella degl' iperspazi , e ciò in virtù di un' idea, semplice ma felice, per la quale si usa di un certo numero (detto *rango*) che preso col segno negativo funge nella teoria degli spazi ad infinite dimensioni, tale e quale come il numero delle dimensioni nella teoria degl' iperspazi.

§ 1.

Preliminari.

1. POSTULATO :

Dato un iperspazio esiste un punto che non appartiene ad esso.

2. La classe di tutti i punti che esistono sarà chiamata *ambiente assoluto*, e sarà indicata con U_0 .

3. In U_0 sia dato un iperspazio proprio S'_r con $r > 0$; le rette perpendicolari ad esso in uno stesso suo punto proprio P', generano una figura F che è incontrata in un sol punto da ogni S_r che non abbia con essa infiniti punti comuni.

Infatti un S_r siffatto (1) e l' S'_r giacciono in un S_{2r+1} ; le rette perpendicolari ad S'_r

(*) Cfr., p. es., i lavori di S. PINCHERLE, e specialmente :

Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale [Rendiconti della R. Accademia di Bologna, febbraio 1897] ; *Appunti di calcolo funzionale distributivo* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie 2ª, vol. XXX (1897)]; *Lo spazio funzionale e le sue omografie* [Giornale di Matematiche, vol. L (1912)].

(1) Volendo un S_r che non abbia infiniti punti comuni con F, si può procedere come segue. Si conduca per S'_r un S_{2r+1}; in questo le rette perpendicolari ad S'_r in P', generano un S_{r+1} che ha un sol punto comune, e non infiniti, con un S_r generico di S_{2r+1} . Deduciamo, inoltre, che esistono infiniti S_r ognuno dei quali ha con F un sol punto comune.

in P' e poste in quest' S_{2r+1}, generano un S_{r+1} (parte di F) che non avendo per ipotesi infiniti punti comuni con S_r, ne avrà uno solo.

Si osservi, inoltre, che F non è contenuta in alcun iperspazio; infatti dato un S_n qualunque, sia S_m un iperspazio che contenga S'_r e S_n. Scelto (n° 1) un punto A fuori di S_m, si ottiene un $S_{r+1} \equiv AS'_r$ che ha in comune con S_m l' S'_r nè alcun altro punto. Ne segue che la retta perpendicolare ad S'_r in P' e posta nell' S_{r+1}, siccome non giace in S'_r, non appartiene all' S_m, e quindi nemmeno all' S_n, mentre essa appartiene ad F.

4. Si osservi che la figura I luogo dei punti impropri di F, è incontrata in un sol punto da ogni S_{r+1} che non abbia con essa infiniti punti comuni.

Infatti siccome un S_r generico di S_{r+1} ha un punto solo comune con F, la figura comune a questa e ad S_{r+1} è una retta, il cui punto improprio (²) è l' unico punto comune ad I e ad S_{r+1}.

È da notare, ancora, che I, come (n° 3) F, non appartiene ad alcun iperspazio, perchè altrimenti F, che evidentemente è la proiezione di I da P', apparterrebbe anch' essa ad un iperspazio.

5. Una figura F' che, come la F e la I (n.ⁱ 3 e 4), sia incontrata in un sol punto ovvero (ma non sempre) in infiniti punti da qualunque S_l, non può godere della stessa proprietà rispetto a qualunque S_h con $h \gtrless l$.

Infatti siccome ogni S_l ha almeno un punto comune con F', per $h > l$ ogni S_h avrebbe sempre infiniti punti comuni con F'; se poi fosse $h < l$, allora sarebbe ogni S_l ad avere sempre infiniti punti comuni con F'.

6. L' ambiente assoluto U_0, la figura F, e i luoghi dei loro punti impropri saranno chiamati *spazi* (*lineari*) *ad infinite dimensioni*, o anche, per amor di brevità, ***ultra-spazi***.

Se un ultraspazio è incontrato (nⁱ 3 e 4) in un sol punto ovvero (ma non sempre) in infiniti punti da qualunque S_l, esso sarà indicato con U_{-l}, e il numero l ne sarà il *rango*.

Se i punti di un ultraspazio sono tutti impropri, esso sarà chiamato *improprio*, altrimenti sarà chiamato *proprio*.

Dunque, p. es., la figura F (n° 3) è un U_{-r} proprio, mentre la figura I (n° 4) è un $U_{-(r+1)}$ improprio.

Quando l' ultraspazio è proprio, e precisamente (n° 3) è il luogo delle rette perpendicolari ad un S'_r proprio in un punto proprio P' di questo, si dirà che l'iperspazio S'_r e il punto P' costituiscono una *coppia generatrice* dell'ultraspazio; si scriverà $U_{-r} \equiv (S'_r, P')$.

Assumeremo lo 0 come *rango* dell' ambiente assoluto U_0 (³).

(²) Questa retta non è impropria perchè, per ipotesi, S_{r+l} e I non hanno infiniti punti comuni.

(³) Si è dato senz' altro il nome di *ultraspazio* alla figura I per amor di semplicità; ma basta togliere nel n° 3 la condizione che P' sia proprio, affinchè sia possibile poi *dimostrare* che anche la figura I è il luogo delle rette (improprie) perpendicolari ad un S_{r+1} proprio in un punto improprio di questo.

E invero sia $U_{-r} \equiv (S_r, P)$ un ultraspazio proprio (onde P è proprio) ed A_∞ un suo punto improprio; la retta PA_∞ è dunque perpendicolare ad S_r in P. Posto $S_{r+1} \equiv A_\infty S_r$, si vuol dimostrare che il luogo I dei punti impropri di U_{-r}, è l' $U_{-(r+1)} \equiv (S_{r+1}, A_\infty)$. Si conduca infatti un S_{r+2} per S_{r+1}; la retta impropria S'_1, del piano posto in S_{r+2} e perpendicolare ad S_r in P, appartiene ad U_{-r}; inoltre siccome essa è la polare (nella polarità assoluta di S_{r+2}) dell'S_{r-1} improprio di S_r, così il polo dell'$S'_r \equiv A_\infty S_{r-1}$ giace in S'_1 medesima, onde questa retta, che già passa per A_∞, è perpendicolare ad S_{r+1} in A_∞. Viceversa

7. *Se una retta ha due punti distinti in un ultraspazio, essa giace in questo.* Infatti siano A e B due punti distinti dell'ultraspazio proprio $U_{-r} \equiv (S'_r , P')$; ognuna delle rette AP', BP' è perpendicolare a tutte le rette di S'_r. Ne segue che una qualunque di questa passante per P', è perpendicolare al piano ABP', onde la retta AB appartiene all'ultraspazio U_{-r}.

Se, poi, i punti A e B appartenessero all'ultraspazio improprio U_{-l}, per quanto ora si è dimostrato la retta AB apparterrebbe all' $U_{-(l-1)}$ proprio di cui, per definizione (n[i] 4 e 6), U_{-l} è il luogo dei punti impropri. Ma AB è una retta impropria, quindi essa appartiene ad U_{-l}.

8. Dal teorema del n° precedente si deduce che

a) la parallela ad una retta di un ultraspazio condotta per un punto di questo, giace in questo medesimo.

b) Ne segue ancora che in un ultraspazio esistono infiniti iperspazi S_n, n qualunque; anzi se un S_n ha $n+1$ punti linearmente indipendenti nell' ultraspazio, esso appartiene a questo.

c) Osserviamo infine che (n° 8, *b*) due ultraspazi hanno sempre infiniti punti comuni.

9. Sia l'ultraspazio proprio $U_{-r} \equiv (S'_r , P')$. Se S''_r è lo spazio, ad r dimensioni, parallelo di 1ª specie (4) ad S'_r e passante per un qualunque punto proprio P'' di U_{-r}, si conduca per P'', in U_{-r}, una retta S''_1 ad arbitrio, e da P' la parallela S'_1 a questa. Siccome S'_1, che (n° 8, *a*) giace in U_{-r}, è perpendicolare ad S'_r, sarà anche S''_1 perpendicolare ad S''_r. Viceversa, se S''_1 è una retta perpendicolare ad S''_r in P'', la parallela S'_1 ad S''_1, condotta per P', risulterà perpendicolare ad S'_1 in P', cioè apparterrà ad U_{-r}, e di conseguenza (n° 8, *a*) anche S''_1 apparterrà ad U_{-r}. Ne segue che questo ultraspazio si può anche costruire come il luogo delle rette perpendicolari ad S''_r in P'', cioè $U_{-r} \equiv (S''_r, P'')$.

Concludiamo che

ogni ultraspazio proprio ammette infinite coppie generatrici.

10. Siano dati l'ultraspazio improprio U_{-r} e il punto proprio P; sia inoltre $U'_{-(r-1)} \equiv (S'_{r-1} , P')$ l' ultraspazio proprio di cui (n° 6) U_{-r} è il luogo dei punti impropri.

Indicato con S_{r-1} lo spazio, ad $r-1$ dimensioni, parallelo di 1ª specie ad S'_{r-1} e passante per P, è evidente che la figura ottenuta proiettando da P tutti i punti di U_{-r}, coincide coll' $U_{-(r-1)} \equiv (S_{r-1} , P)$. Concludiamo dunque che

ogni ultraspazio improprio U_{-r} *è il luogo dei punti impropri di infiniti ultraspazi propri* $U_{-(r-1)}$.

11. Siano dati un ultraspazio U_{-r} e un punto S_0 fuori di esso, onde è $-r < 0$; si

---

sia S''_1 una retta perpendicolare ad S_{r+1} in A_∞, onde essa è impropria; nell' $S'_{r+2} \equiv S''_1 S_{r+1}$, S''_1 passa per il polo di S'_r, e quindi lo spazio (ad $r-1$ dimensioni) polare di S''_1 apparterrà ad S'_r, e dovendo esso essere polare di A_∞ nella polarità assoluta di S_{r+1}, sarà precisamente S_{r-1}. Ne segue che le rette proiettanti da P i punti di S''_1, risultano perpendicolari ad S_r, cioè S''_1 appartiene ad U_{-r}. Concludiamo dunque che il luogo I dei punti impropri di U_{-r} è $U_{-(r+1)} \equiv (S_{r+1}, A_\infty)$.

Si osservi infine che un altro modo di definire gli ultraspazi (propri o impropri) è quali *spazi lineari* (figure, cioè, alle quali appartiene una retta qualora abbia con essi due punti distinti comuni) tali che ognuno di essi goda della seguente proprietà: esiste un numero (intero positivo) finito r, da chiamarsi *rango*, tale che ogni S_r abbia coll' ultraspazio un sol punto comune ovvero (ma non sempre) infiniti punti comuni. Ma con questa definizione, della quale ci serviremo in altri lavori, si va incontro all' obbiezione se possano esistere spazi lineari (non iperspazi) privi di rango (spazi che si potrebbero chiamare *ultraspazi a rango infinito*).

(4) Cioè S'_r e S''_r hanno in comune un S_{r-1} improprio.

vuol dimostrare che la figura $S_0\ U_{-r}$, ottenuta proiettando U_{-r} da S_0, è un ultraspazio, e precisamente è un $U_{-(r-1)}$.

a) Cominciamo a supporre che sia $U_{-r} \equiv (S_r, P)$; sia inoltre S_0 anche proprio e, com'è sempre (n° 9) possibile ammettere, fuori di S_r.

L' $S_{r+1} \equiv S_0\ S_r$ seca evidentemente U_{-r} nell' unica retta AP perpendicolare ad S_r e posta in esso S_{r+1}; e seca la figura $S_0\ U_{-r}$ nel fascio di rette di centro S_0 esistente nel piano APS_0. Ciò posto si costruisca nel detto S_{r+1} l' S_{r-1} perpendicolare a questo piano in S_0; si vuol dimostrare che è $S_0\ U_{-r} \equiv U_{-(r-1)} \equiv (S_{r-1}, S_0)$.

Sia infatti PB una qualunque retta perpendicolare ad S_r, e quindi posta in U_{-r}; la PB è perpendicolare a tutte le rette di S_r, e quindi anche alle rette di S_{r-1} perchè queste sono parallele ad S_r (5); in altri termini possiamo dire che PB è perpendicolare all' S_{r-1}. Ne segue che questo essendo perpendicolare alle rette PS_0 e PB, è perpendicolare al piano BPS_0, e quindi a tutte le rette che da S_0 proiettano i punti di PB. In altri termini: S_{r-1} è perpendicolare a qualunque retta che da S_0 proietta un punto di U_{-r}, cioè $S_0\ U_{-r}$ è parte di $U_{-(r-1)} \equiv (S_{r-1}, S_0)$.

Viceversa sia S'_1 una qualunque retta perpendicolare ad S_{r-1} in S_0. L' $S'_r \equiv S'_1\ S_{r-1}$ incontra U_{-r} (almeno) in un punto (ni 6 e 3) che congiunto con S_0 dà, per quanto si è ora dimostrato, una retta S''_1 perpendicolare ad S_{r-1}. Ne segue $S''_1 \equiv S'_1$, ed ecco che S'_1 incontra U_{-r}, cioè ogni retta perpendicolare ad S_{r-1} in S_0, si può ottenere proiettando da S_0 un punto di U_{-r}. Dunque è $S_0\ U_{-r} \equiv U_{-(r-1)} \equiv (S_{r-1}, S_0)$.

b) Se, invece, S_0 è improprio, si scelga un punto proprio S'_0 fuori di U_{-r} e di S_r. Detto A un qualunque punto di U_{-r}, siccome la retta congiungente A con la traccia della retta $S_0\ S'_0$ in U_{-r}, appartiene al piano $AS_0\ S'_0$ e (n° 7) anche ad U_{-r}, così la retta $S'_0 A$ appartiene alla figura $S_0\ U_{-r}$, e la retta $S_0 A$ alla figura $S'_0\ U_{-r}$, cioè $S_0\ U_{-r} \equiv S'_0\ U_{-r}$. Ma si è sopra dimostrato che $S'_0\ U_{-r}$ è un $U_{-(r-1)}$ proprio, dunque anche $S_0\ U_{-r}$ è un $U_{-(r-1)}$ proprio.

c) Supponiamo ora che U_{-r} sia improprio ed S_0 proprio.

Che la figura $S_0\ U_{-r}$ sia un $U_{-(r-1)}$ proprio, fu dimostrato nel n° 10.

d) Siano, infine, impropri U_{-r} e S_0.

Detto $U_{-(r-1)}$ l' ultraspazio proprio di cui U_{-r} è il luogo dei punti impropri, la figura $S_0\ U_{-(r-1)}$ è, per la parte *b*), un $U_{-(r-2)}$ proprio.

L' $U'_{-(r-1)}$ luogo dei punti impropri di questo, contiene (n° 7) la figura $S_0\ U_{-r}$, anzi coincide con questa, perchè i punti impropri di $S_0\ U_{-(r-1)}$ si ottengono soltanto quando da S_0 si proiettano punti impropri di $U_{-(r-1)}$, cioè punti di U_{-r}. Possiamo dunque affermare che è $S_0\ U_{-r} \equiv U'_{-(r-1)}$.

Conciudiamo dunque che

proiettando un ultraspazio U_{-r} *da un punto fuori di esso, si ottiene un ultraspazio* $U_{-(r-1)}$.

12. Applicando successivamente il teorema del n° precedente, si può concludere (6) che

---

(5) Infatti se $S_0 M$ è una retta di S_{r-1}, essa determina col piano APS_0 un S_3 che seca l' S_r in un piano S_2. Or siccome AP è perpendicolare ad S_2, sarà APS_0 perpendicolare ad S_2. Ma anche $S_0 M$ è perpendicolare ad APS_0, e quindi $S_0 M$, essendo parallela ad S_2, è parallela ad S_r.

(6) Che il rango dell' ultraspazio $S_n\ U_{-r}$, per $r \geq n+1$, sia $r-n-1$, si può dimostrare direttamente facendo vedere che esso ha un sol punto comune con un S_{r-n-1} generico.

proiettando un ultraspazio U_{-r} *da un iperspazio* S_n *non avente alcun punto comune con esso, si ottiene un* $U_{-(r-n-1)}$.

Si noti che per $r = n + 1$ è $U_{-(r-n-1)} \equiv U_0 \equiv$ *ambiente assoluto.*

13. Siano dati i due ultraspazi U_{-r} e $U'_{-r'}$, con $-r' \geq -r$; si vuol dimostrare che $U'_{-r'}$ non è parte di U_{-r}, eccetto il caso che sia $r' = r$ e i due ultraspazi coincidano.

Supponiamo primieramente che i detti ultraspazi siano propri, e precisamente si abbia, com'è (n° 8 *c*, e n° 9) sempre possibile, $U_{-r} \equiv (S_r, P)$ e $U'_{-r'} \equiv (S'_{r'}, P)$. Se questo ultraspazio è parte di quello, tutte le rette di $U'_{-r'}$ passanti per P sono perpendicolari ad S_r, oltre che ad $S'_{r'}$; se dunque questi due iperspazi non coincidessero, tutte le rette di $U'_{-r'}$ passanti per P sarebbero perpendicolari ad un S_l ove è $l > r'$, ciò che è assurdo (7). Dunque dev' essere $S_r \equiv S'_{r'}$, e quindi $U_{-r} \equiv U'_{-r'}$.

Consideriamo ora l' ipotesi che $U'_{-r'}$ sia improprio e parte di U_{-r} anch' esso improprio (8). Proiettandoli ambidue da un punto proprio A, si ottengono (n° 11) gli ultraspazi propri $U'_{-(r'-1)} \equiv AU'_{-r'}$ e $U_{-(r-1)} \equiv AU_{-r}$, e per quanto si è dimostrato, risultando $U'_{-(r'-1)}$ parte di $U_{-(r-1)}$, dev' essere $U_{-(r'-1)} \equiv U_{-(r-1)}$, e di conseguenza $U_{-r} \equiv U'_{-r'}$.

Concludiamo dunque che

per $-r' > -r$ *un* $U'_{-r'}$ *non è parte di un* U_{-r}, *nè ciò è possibile per* $-r' = -r$, *eccetto il caso che i due ultraspazi coincidano* (9).

14. Sia dato un ultraspazio $U_{-r} \equiv (S_r, P)$; per l' S_r si conduca un qualunque S_l (onde è $l > r$). Siccome ogni retta perpendicolare ad S_l in P, è di conseguenza perpendicolare ad S_r (ma non viceversa), si deduce che l'ultraspazio $U_{-l} \equiv (S_l, P)$ è contenuto in U_{-r}.

Se, invece, U_{-r} è improprio, applicando quanto si è dimostrato all' $U_{-(r-1)}$ proprio di cui U_{-r} è il luogo dei punti impropri, si ottiene un U_{-l} contenuto in $U_{-(r-1)}$, e l'$U_{-(l+1)}$, luogo dei punti impropri di U_{-l}, appartiene evidentemente ad U_{-r}.

Concludiamo che (10)

in ogni ultraspazio U_{-r} *esistono infiniti ultraspazi* U_{-l}, *ove* (n° 13) *è* $-l < -r$.

15. Gli ultraspazi $U_{-(r+1)}$ contenuti (n° 14) in un U_{-r}, saranno chiamati *ultrapiani* di questo.

16. Siano dati gli ultraspazi $U_{-r} \equiv (S_r, P)$ e $U'_{-r'} \equiv (S'_{r'}, P)$, ove $U'_{-r'}$ è parte di U_{-r}, onde (n° 13) è $-r' < -r$, ovvero è $-r' = -r$ e son coincidenti i detti ultraspazi. Si vuol dimostrare che l' iperspazio S_r appartiene ad $S'_{r'}$.

Infatti se così non fosse, ogni retta di $U'_{-r'}$ passante per P, essendo perpendicolare ad S_r, oltre che ad $S'_{r'}$, sarebbe perpendicolare ad un S_l, ove è $l > r'$, e ciò è assurdo.

Dunque

se $U'_{-r'} \equiv (S'_{r'}, P)$ *appartiene ad* $U_{-r} \equiv (S_r, P)$, S_r *appartiene ad* $S'_{r'}$.

---

(7) Infatti è evidente che essendo $S'_{r'}$ parte di S_l, con $r' < l$, esistono rette perpendicolari ad $S'_{r'}$ ma non ad S_l.

(8) Se U_{-r} fosse proprio, $U'_{-r'}$ sarebbe parte dell' $U_{-(r+1)}$ luogo dei punti impropri di U_{-r}, e si ragionerebbe come nel testo, venendo alla conclusione che l' $U'_{-(r'-1)} \equiv AU'_{-r'}$ sarebbe parte di $U_{-r} \equiv AU_{-(r+1)}$, ciò che è assurdo per la dimostrazione già fatta nel testo, e dopo avere osservato che $r'-1$ non è eguale ad r.

(9) A cominciare da questo punto, e si vedrà molto meglio in seguito, si può osservare che il numero opposto al rango (n° 6) degli ultraspazi, si comporta, per questi, come la dimensione per gl' iperspazi. Sarebbe quindi forse conveniente dare agli ultraspazi il nome di « *spazi a dimensione negativa* » denominazione non propria ma utile.

(10) Cfr. l' annotazione (9).

§ 2.

Immersione; intersezione.

17. Una o più figure si dicono *immerse* in un ultraspazio U_{-r}, quando esse appartengono a questo, ma non appartengono ad alcun ultraspazio U_{-l} con $-l < -r$.

18. Siano U_{-l} e U_{-h} due ultraspazi immersi (n° 17) in un U_{-r}.

a) Cominciamo ad esaminare l' ipotesi che essi siano ambidue propri.

Ammesso che esista un punto proprio P comune ad U_{-l} e U_{-h}, si può (n° 9) sempre porre

$$U_{-r} \equiv (S_r\,,\ P)\,,\quad U_{-l} \equiv (S_l\,,\ P)\,,\quad U_{-h} \equiv (S_h\,,\ P).$$

I due iperspazi S_l e S_h hanno in comune (n° 16) S_r, nè alcun altro punto, perchè se essi avessero in comune un S_n, con $n > r$, i due ultraspazi U_{-l} e U_{-h} apparterrebbero ad $U_{-n} \equiv (S_n\,,\ P)$, ciò che è assurdo perchè per ipotesi questi due ultraspazi sono immersi (n° 17) in U_{-r}. Ne segue che S_l e S_h sono immersi in un S_{l+h-r}, onde U_{-l} e U_{-h} hanno in comune [11] l' $U_{-(l+h-r)} \equiv (S_{l+h-r}\,,\ P)$.

b) Se U_{-l} e U_{-h} non hanno alcun punto proprio comune, ma uno almeno di essi, p. es. U_{-l}, è proprio, proiettando da un punto proprio A di U_{-l}, si ottiene (n° 11) l' $U_{-(h-1)} \equiv AU_{-h}$ che insieme con U_{-l} sono immersi in U_{-r}. Ne segue, per la dimostrazione fatta, che essi si secano in un $U_{-(h-1+l-r)}$, il cui ultraspazio improprio $U_{-(l+h-r)}$ è evidentemente la figura comune ad U_{-l} e U_{-h}.

c) Se, infine, ambidue gli ultraspazi U_{-l}, U_{-h} sono impropri (onde pure improprio è U_{-r}), proiettando da un punto proprio P si ottengono (n° 11) gli ultraspazi

$$U_{-(r-1)} \equiv PU_{-r}\,,\quad U_{-(l-1)} \equiv PU_{-l}\,,\quad U_{-(h-1)} \equiv PU_{-h}\,,$$

gli ultimi due dei quali sono immersi nel primo [12], onde essi, per la dimostrazione fatta avanti in *a*), si secano in un $U_{-(l-1+h-1-r+1)} \equiv U_{-(l+h-r-1)}$, il cui $U_{-(l+h-r)}$ improprio è evidentemente la figura comune ad U_{-l} e U_{-h}.

Dalla discussione fatta possiamo concludere che [13]

due ultraspazi U_{-l} *e* U_{-h} *immersi in un* U_{-r}, *si secano in un* $U_{(-l)+(-h)-(-r)}$.

19. Ne segue che se una figura immersa in un U_{-r} appartiene ad un U_{-k} $(-k \geq -r)$, questo contiene U_{-r}.

Infatti nell' ipotesi contraria U_{-k} e U_{-r} avrebbero in comune (n° 18) un ultraspazio U_{-s}, $-s < -r$, cui apparterrebbe la data figura, ciò che è assurdo perchè questa è immersa in U_{-r}.

20. Siccome, inoltre, è (n° 18 *a*) sempre $l + h - r > 0$, così possiamo affermare che due e quindi

più ultraspazi hanno in comune un ultraspazio.

---

(11) Nè alcun altro punto, perchè ogni retta comune ad U_{-l} e U_{-h} e passante per P, dovendo essere perpendicolare ad S_l ed anche ad S_h, sarà perpendicolare all' iperspazio in cui questi sono immersi, cioè apparterrà all' $U_{-(l+h-r)}$ del testo.

(12) Infatti se essi appartenessero ad un U'_{-r} (certamente proprio perchè tale è P), U_{-l} e U_{-h} apparterrebbero all' $U_{-(r+1)}$ improprio di questo, ciò che (n° 17) è assurdo.

(13) Cfr. l' annotazione (9).

21. Siano ora dati due ultraspazi U_{-l} e U_{-h} immersi in U_{-r} e secantisi (n° 20) in un U_{-t}. Per il teorema del n° 18 è

$$-t = (-l) + (-h) - (-r), \text{ da cui } -r = (-l) + (-h) - (-t).$$

Concludiamo che [14]

se due ultraspazi U_{-l} *e* U_{-h} *si secano in un* U_{-t}, *essi sono immersi in un* $U_{(-l)+(-h)-(-t)}$.

22. Sia F una figura immersa in un ultraspazio U_{-r}, e sia P un punto fuori di questo; le figure F e P giacciono nell' $U_{-(r-1)}$ ottenuto (n° 11) proiettando U_{-r} da P. Se poi esse appartenessero ad un U'_{-r}, questo conterrebbe (n° 19) U_{-r}, cioè (n° 13) sarebbe $U_{-r} \equiv U'_{-r}$, ciò che è assurdo perchè P è per ipotesi fuori di U_{-r}.

Concludiamo che la figura F e il punto P sono immersi (n° 17) in $U_{-(r-1)}$.

23. L' ultraspazio U_{-r} e l' iperspazio S_n si sechino in un S_t; si vuol dimostrare che essi sono immersi in un $U_{-(r-n+t)}$.

a) Esaminiamo prima l' ipotesl $n = t + 1$.

Proiettando U_{-r} da un punto P di S_n, ma che sia fuori di S_t, si ottiene (n° 11) un $U_{-(r-1)}$ che contiene U_{-r} e S_n. Questi, poi, sono immersi in quest' $U_{-(r-1)}$, perchè se appartenessero ad un U'_{-r}, questo coinciderebbe (n° 13) con U_{-r}, ciò che è assurdo perchè S_n non appartiene, per ipotesi, ad U_{-r}.

b) Si ammetta ora che il teorema sia vero per n; lo dimostreremo vero per $n+1$. Si conduca, infatti, per S_t un iperpiano S_n dell' S_{n+1} dato; questo S_n e U_{-r}, per quanto si è ammesso, sono immersi in un $U_{-(r-n+t)}$ che non contiene [15] S_{n+1}. Ne segue che U_{-r}, S_n, e un punto P di S_{n+1} posto fuori di $U_{-(r-n+t)}$, sono immersi (n° 22) in un $U_{-(r-n-1+t)}$.

Concludiamo dunque che [16].

se un ultraspazio U_{-r} *e un iperspazio* S_n *si secano in un* S_t, *essi sono immersi in un* $U_{(-r)+n-t}$.

24. L' ultraspazio U_{-r} e l' iperspazio S_n siano immersi in un U_{-l}. Indicando con S_t l' iperspazio secondo cui si secano [17], è (n° 23)

$$-l = (-r) + n - t, \quad \text{cioè} \quad t = (-r) + n - (-l).$$

Dunque [18]

se un ultraspazio U_{-r} *e un iperspazio* S_n *sono immersi in un* U_{-l}, *essi si secano in un* $S_{(-r)+n-(-l)}$.

25. In un ultraspazio U_{-n} sia dato un $U_{-(n+2)}$; l' ente i cui elementi sono gli ultrapiani (n° 15), di U_{-n}, passanti per esso, si chiamerà *fascio* di ultrapiani.

Analogamente, dato un $U_{-(n+3)}$, l' ente i cui elementi sono gli ultrapiani, di U_{-n}, passanti per esso, si chiamerà *rete* di ultrapiani.

---

(14) Cfr. l' annotazione (9).

(15) Infatti preso in S_{n+1} un punto B fuori di S_n, ammettiamo che B appartenga ad $U_{-(r-n+t)}$, ultraspazio, questo, che si può (n° 12) costruire proiettando U_{-r} da un S_{n-t-1} generico di S_n. Allora l' $S_{n-t} \equiv BS_{n-t-1}$ incontrerebbe U_{-r} in un punto A che non appartiene ad S_t (perchè altrimenti S_{n-t}, e quindi B, apparterrebbe ad S_n), onde U_{-r} ed S_{n+1} avrebbero in comune l' $S_{t+1} \equiv AS_t$, e ciò è assurdo.

(16) Cfr. l' annotazione (9).

(17) La figura dei punti comuni ad U_{-r} e S_n, è tale che se contiene due punti distinti di una retta, contiene (n° 7) questa; dunque, giacchè la figura appartiene a un iperspazio, è essa stessa un iperspazio.

(18) Cfr. l' annotazione (9). Per $-r + n + l < o$, U_{-r} e S_n non hanno alcun punto comune.

È poi evidente che gli ultrapiani di un fascio si possono mettere (ni 24 e 11) in corrispondenza biunivoca continua coi punti di una retta; quelli di una rete si possono mettere (ni 24 e 12) in corrispondenza biunivoca continua con (le rette di un piano, e quindi con) i punti di un piano ([19]).

Si osservi, infine, che un fascio è individuato (n° 18) da due qualunque dei suoi ultrapiani, e una rete (n° 18) da tre.

§ 3.

Dualità, perpendicolarità, rotazione.

26. Dato un ultraspazio U_{-r}, siano U_{-l} e S_n un ultraspazio e un iperspazio di U_{-r}. Diremo che U_{-l} e S_n sono spazi *duali* (in U_{-r}) quando ([20]) è $-l+n=-r-1$.

Al punto S_0, dunque, è duale l' ultrapiano $U_{-(r+1)}$; alla retta S_1 è duale l' $U_{-(r+2)}$; al piano S_2 è duale l' $U_{-(r+3)}$; e così via.

Siccome le proprietà sin ora osservate degli ultraspazi sono ([21]) le medesime proprietà fondamentali degl' iperspazi, proprietà per le quali questi soddisfano alla legge di dualità, così possiamo affermare che
in ogni ultraspazio la legge di dualità esiste.

È noto, per esempio, che se un S_l e un S_n si secano in un S_t, essi sono immersi in un S_{l+n-t}; applicando la legge di dualità in un ultraspazio U_{-r}, si ha che se un $U_{-(r+l+1)}$ e un $U_{-(r+n+1)}$ sono immersi in un $U_{-(r+t+1)}$, essi si secano in un $U_{-(r+l+n-t+1)}$, e ciò è (n° 18) vero ([22]).

27. Consideriamo un U_{-l} proprio di un ultraspazio (proprio) U_{-r}, e sia P un qualunque punto proprio di U_{-l}, onde (n° 9) è $U_{-l}\equiv(S_l, P)$.

Ciò posto si osservi che essendo ([23]) U_{-l} ed S_l immersi nell' ambiente assoluto, anche U_{-r} ed S_l godono della stessa proprietà, onde (n° 24) essi si secano in un S_{l-r}. Ma il luogo delle rette perpendicolari ([24]) ad U_{-l} in P è S_l, dunque le rette siffatte e poste

---

([19]) In U_{-n} si abbia un $U_{-r'}$; ogni U_{-r}, di U_{-n}, passante per $U_{-r'}$, seca (n° 24) un generico $S_{r'-n-1}$ in un $S_{r'-r-1}$: viceversa dato un $S_{r'-r-1}$ di $S_{r'-n-1}$, rimane individuato (n° 12) un U_{-r} passante per $U_{-r'}$. Possiamo dunque concludere che
gli U_{-r}, *di* U_{-n}, *passanti per un* $U_{-r'}$, *si possono mettere in corrispondenza biunivoca continua con gli* $S_{r'-r-1}$ *di un* $S_{r'-n-t}$.

Per $-r=-n-1$ e $-r'=-n-2$, per $-r=-n-1$ e $-r'=-n-3$ si ottengono i casi particolari considerati nel testo.

([20]) Cfr. l' annotazione ([9]).

([21]) Cfr. l' annotazione ([9]).

([22]) È noto, p. es., che gli S_l di un dato S_n sono in numero $(l+1)(n-l)$ volte infinito. Dualmente, nell' U_{-r}, gli $U_{-(r+l+1)}$ passanti per un dato $U_{-(r+n+1)}$ sono pure in numero $(l+1)(n-l)$ volte infinito, e ciò d' accordo con quanto si concluse nell' annotazione ([19]).

([23]) Infatti U_{-l} ed S_l hanno in comune soltanto il punto P, e quindi (n° 23) essi sono immersi in U_0.

([24]) Dato un ultraspazio proprio U_{-l} e un suo punto proprio P, diremo che una retta è *perpendicolare* ad U_{-l} in P, quando essa è perpendicolare a tutte le rette di U_{-l} passanti per P (e quindi a tutte le rette di U_{-l}). Ciò posto si osservi che se è $U_{-l}\equiv(S_l, P)$, è S_l il luogo delle rette perpendicolari ad U_{-l} in P; infatti se fosse S_1 una retta, fuori di S_l, perpendicolare ad U_{-l} in P, ogni retta di U_{-l} sarebbe perpendicolare, in P, all' $S_{l+1}\equiv S_1 S_l$, ciò che (n° 13) è assurdo.

in U_{-r} costituiscono l' S_{l-r} ora detto.

Concludiamo che

dato un ultraspazio proprio U_{-r}, *tutte le sue rette perpendicolari ad un suo* U_{-l} *in un dato punto proprio di questo, costituiscono un iperspazio* S_{l-r}.

28. In particolare, dunque, per $l = r + 1$ possiamo (n° 27) affermare che dato un U_{-r} proprio, esiste in questo una sola retta perpendicolare ad un dato ultrapiano (di U_{-r}) e passante per un punto dato.

29. In un ultraspazio proprio U_{-r} sia dato un iperspazio proprio S_h; il luogo delle rette di U_{-r} perpendicolari ad S_h in un punto proprio P di esso, è (n[i] 6, 3, 20) un ultraspazio che indichiamo con U_{-x}. Ma (n° 27) dev'essere $-x + h = -r$, cioè $x = r + h$, dunque [25] *dato un ultraspazio proprio* U_{-r}, *tutte le sue rette perpendicolari ad un suo* S_h *in un dato punto proprio di esso, costituiscono un ultraspazio* $U_{-(r+h)}$.

30. Sia S_1 una retta propria di un ultraspazio U_{-r}; le rette di questo perpendicolari ad S_1 in un suo punto proprio P, costituiscono (n° 29) un ultrapiano $U_{-(r+1)}$. Assumiamo come corrispondenti il punto improprio S_0 di S_1 e l' $U_{-(r+2)}$ improprio di $U_{-(r+1)}$. Si ottiene in tal modo fra i punti e gli ultrapiani dell' ultrapiano improprio $U'_{-(r+1)}$ di U_{-r}, una corrispondenza biunivoca tale che ai punti di un S_l corrispondono (n[i] 29 e 6) gli ultrapiani passanti per un $U_{-(r+l+2)}$, e ai punti di un U_{-h} corrispondono (n[i] 11 e 27) gli ultrapiani passanti per un S_{h-r-2}. Osserviamo inoltre che, sempre in $U'_{-(r+1)}$, agli ultrapiani passanti per S_l, corrispondono i punti del sopradetto $U_{-(r+l+2)}$. Possiamo dunque dire che la corrispondenza sopradetta, esistente fra i punti e gli ultrapiani di $U'_{-(r+1)}$, è involutoria; essa sarà chiamata *polarità assoluta* di U_{-r}, e spazi *polari* si diranno un iperspazio e un ultraspazio di $U'_{-(r+1)}$ che si comportino tra loro come S_l e $U_{-(r+l+2)}$.

Si noti che due spazi polari sono (n° 26) spazi duali in $U'_{-(r+1)}$, e che due spazi di U_{-r} sono o no perpendicolari tra loro, secondo che i loro spazi impropri appartengono ovvero no a due spazi polari, cioè, come diremo, secondo che questi spazi impropri sono o no *reciproci* rispetto alla polarità assoluta di U_{-r} [26].

31. Sia $U_{-(r+2)}$ un dato ultraspazio proprio di U_{-r}; le rette perpendicolari ad esso in un suo punto proprio P costituiscono (n° 27) un piano S_2.

Ciò posto siano M ed M_1 due punti di S_2 equidistanti da P; diremo che il punto M_1 si è ottenuto facendo *rotare* il punto M intorno ad $U_{-(r+2)}$. Si dirà inoltre che M è rotato dell' angolo (convesso o piatto) $M(P)M_1$ nel senso dell'arco $\widehat{MM_1}$ (del cerchio di centro P).

32. Indichi S'_2 il piano perpendicolare ad $U_{-(r+2)}$ in un altro punto proprio P' di questo, e siano M' e M'_1 due punti di S'_2 equidistanti da P'. Diremo che M_1 e M'_1 si sono ottenuti facendo rispettivamente rotare M e M' nello *stesso senso* o in *senso opposto*, secondo che gli archi MM_1 e $M'M'_1$ hanno o no lo stesso senso considerati nei piani paralleli (di 1ª specie) S_2 e S'_2 [27].

---

(25) Si noti che è S_h il luogo delle rette di U_{-r} perpendicolari ad U_{-x} in P; infatti se esistesse una retta S_1, fuori di S_h, e perpendicolare ad U_{-x} in P, ogni retta di U_{-x} sarebbe perpendicolare all' $S_{h+1} \equiv S_1 S_h$, cioè ogni retta di U_{-r} perpendicolare ad S_h in P, sarebbe perpendicolare ad S_{h+1}, e ciò evidentemente è assurdo.

(26) Due spazi (iperspazi o ultraspazi che siano) diconsi *perpendicolari* tra loro, quando ogni retta dell' uno è perpendicolare a tutte le rette dell' altro; cfr. l' annotazione (24). Si cfr. pure l' annotazione (9).

(27) I piani S_2 e S'_2 sono paralleli (di 1ª specie) perchè ogni ultrapiano di U_{-r} passante per $U_{-(r+}$ li seca in due rette che, come si dimostra facilmente, sono parallele.

33. In generale, se fra i punti di due figure F e F' di U_{-r} esiste una corrispondenza biunivoca tale che ogni punto di F' si possa ottenere facendo rotare il suo corrispondente di F intorno ad $U_{-(r+2)}$ costantemente nello stesso senso (n° 32) e di un angolo dato, si dirà che la figura F' si è ottenuta facendo *rotare* la figura F intorno ad $U_{-(r+2)}$ nel senso dato e dell'angolo dato.

34. Siano dati due ultraspazi propri U_{-r} e U'_{-r} secantisi in un $U_{-(r+1)}$, onde essi sono immersi (n° 21) in un $U_{-(r-1)}$, e si tiri (n° 27) il piano S_2 perpendicolare ad $U_{-(r+1)}$ in un punto P.

Indicando con S_1 e S'_1 le rette (n° 24) tracce di U_{-r} e U'_{-r} in S_2, l'angolo (acuto o retto) $\widehat{S_1 S'_1}$ si dirà *angolo* dei due ultrapiani U_{-r} e U'_{-r} [28].

Ciò posto si faccia rotare U_{-r}, intorno ad $U_{-(r+1)}$, dell'angolo $\widehat{S_1 S'_1}$; è chiaro che la figura così ottenuta sarà precisamente l'ultrapiano U'_{-r}. Ne segue [29] che i due ultraspazi U_{-r} e U'_{-r} sono eguali.

In generale gli ultraspazi U_{-r} e U'_{-r} si sechino in un U_{-l}, e si conduca per questo, per un punto generico di U_{-r} e per un punto generico di U'_{-r}, un U''_{-r} del resto arbitrario. Evidentemente basterà dimostrare $U_{-r} = U''_{-r}$ (e analogamente $U'_{-r} = U''_{-r}$) per poi dedurre $U_{-r} = U'_{-r}$. Se dunque si osserva che gli ultraspazi U_{-r} e U''_{-r} non hanno in comune soltanto U_{-l}, ma bensì si secano (n° 11) in un $U_{-(l-1)}$, possiamo ridurci, applicando successivamente lo stesso procedimento, a dover dimostrare l'eguaglianza di U_{-r} e un U^*_{-r} secantisi in un $U_{-(r+1)}$, ciò che si fece in principio di questo n°. Possiamo dunque affermare che effettivamente è $U_{-r} = U'_{-r}$.

Concludiamo dunque che

due ultraspazi propri aventi lo stesso rango sono figure eguali.

§ 4.

Prospettività, omologia, ultrasfera.

35. In un U_{-r} siano dati due ultraspazi distinti U_{-h} e U'_{-h}; fissato, in U_{-r}, un iperspazio $\Omega \equiv S_{h-r-1}$ non avente alcun punto comune con essi, si dicano *corrispondenti* un punto di U_{-h} e uno di U'_{-h} ogni qual volta appartengano (n° 24) ad uno stesso S_{h-r} passante per Ω.

L'U_{-t}, con $t \leq 2h - r$, comune ad U_{-h} e U'_{-h}, è evidentemente il luogo dei punti *uniti*, cioè dei punti ognuno dei quali corrisponde a se stesso; ne segue che ad una fi-

---

(28) Al variare del punto P in $U_{-(r+l)}$, il piano S_2 varierà rimanendo sempre parallelo (di 1ª specie) a se stesso, onde l'angolo $\widehat{S_1 S'_1}$, sarà di grandezza costante.

(29) Se M_1 e N_1 sono i piedi delle rette perpendicolari condotte ad $U_{-(r+l)}$ da due qualunque punti M ed N di U_{-r}, il quadrangolo semplice $M M_1 N_1 N$ è evidentemente eguale all'altro $M' M_1 N_1 N'$, onde sarà $MN = M'N'$. In quanto all'eguaglianza delle figure, ci riferiamo alla definizione seguente: « Due figure si dicono eguali quando fra i loro punti esiste una corrispondenza biunivoca, in modo che il segmento che congiunge due punti qualunque di una di esse, sia eguale al segmento che congiunge i punti corrispondenti dell'altra figura.

Se si volesse introdurre il *moto* (senza deformazione) nel senso meccanico, allora si dimostrerebbe subito che due ultraspazi propri U_{-r} e U'_{-r} sono eguali. Infatti posto $U_{-r} \equiv (S_r, P)$ e $U'_{-r} \equiv (S'_r, P'')$, basterà far coincidere S_r e S'_r in modo che coincidano P e P', affinchè evidentemente coincidano pure U_{-r} e U'_{-r}.

gura qualunque di U_{-h} avente punti in U_{-t}, corrisponde in U'_{-h} una figura passante per questi stessi punti. Inoltre ad un S_l di U_{-h} corrisponde (nº 24) un S'_l di U'_{-h}, onde in particolare alle rette di U_{-h} corrispondono le rette di U'_{-h}; ad un ultraspazio U_{-s} di U_{-h} corrisponde (ni 12 e 18) un ultraspazio U'_{-s} di U'_{-h}, onde, in particolare, agli ultrapiani di U_{-h} corrispondono gli ultrapiani di U'_{-h}.

La corrispondenza in esame chiamasi *prospettività*; Ω ne è il *centro*.

36. Supponiamo ora che i due ultraspazi U_{-h} e U'_{-h} coincidano, e si fissi un ultrapiano $U_{-(h+1)}$ e tre punti collineari distinti O, A, A' fuori di questo.

Ciò posto scelto un altro punto generico B di U_{-h}, il piano OAB seca $U_{-(r+1)}$ in una retta s; nell'omologia piana di centro O, asse s, e A, A' punti omologhi, a B corrisponderà un certo punto B' che assumeremo quale corrispondente di B in U'_{-h}. Si ottiene in tal modo fra i punti di U_{-h} e quelli di U'_{-h} una corrispondenza biunivoca tale che due punti omologhi sono sempre collineari con O, e ogni punto del dato ultrapiano $U_{-(h+1)}$ è un punto unito ([30]).

È poi facilissimo dimostrare che ad una retta di U_{-h} corrisponde una retta di U'_{-h}, e queste due rette si secano in $U_{-(h+1)}$. Ne segue, evidentemente, che ad un S_n di U_{-h} corrisponde un S'_n di U'_{-h}, e questi due iperspazi si secano in un S_{n-1} di $U_{-(h+1)}$.

Analogamente ad un ultraspazio U_{-s} di U_{-h}, corrisponde un ultraspazio U'_{-s} di U'_{-h}, e questi due ultraspazi si secano in un $U_{-(s+1)}$ di $U_{-(h+1)}$. Infatti sia P un punto di U_{-s} fuori dell' ultraspazio $U_{-(s+1)} \equiv U_{-s}\, U_{-(h+1)}$, e sia P' il suo corrispondente; è facile dimostrare che all' ultraspazio $U'_{-s} \equiv P' U_{-(s+1)}$ appartiene ([31]) il corrispondente di un qualunque punto di U_{-s}. In particolare dunque agli ultrapiani di U_{-h} corrispondono gli ultrapiani di U'_{-h}.

La corrispondenza in esame chiamasi *omologia*; O ne è il *centro*; $U_{-(h+1)}$ ne è l' *ultrapiano d' omologia*.

Con gli ordinari ragionamenti si dimostra che un'omologia è anche individuata qualora si conoscano il centro, l' ultrapiano d' omologia, e due qualunque ultrapiani corrispondenti.

È anche facile definire la *caratteristica* dell' omologia, e quindi l' *omologia armonica*; ecc.

37. In U_{-r} siano dati $n+1$ ultraspazi $U_{-l}, U'_{-l}, \ldots, U^{(n)}_{-l}$ in posizione generica tra loro, e due qualunque consecutivi (nell' ordine scritto) siano (nº 35) prospettivi. Si ottiene in tal modo fra i punti di U_{-l} e $U^{(n)}_{-l}$ una corrispondenza biunivoca tale che ad un S_h qualunque di U_{-l} corrisponde (nº 35) un $S^{(n)}_h$ di $U^{(n)}_{-l}$, e ad un U_{-s} qualunque di U_{-l} corrisponde un $U^{(n)}_{-s}$ di $U^{(n)}_{-l}$.

Si osservi, inoltre, che l' ultraspazio comune (nº 20) agli $n+1$ ultraspazi dati, è evidentemente luogo di punti uniti per la detta corrispondenza biunivoca; dunque possiamo concludere che per questa è luogo ([32]) di punti uniti un $U_{-[(n+1)l-nr]}$.

([30]) Si dimostra come nell' ordinaria Geometria Proiettiva che la coppia A, A' può essere sostituita da qualunque altra coppia di punti omologhi per la costruzione della detta corrispondenza. Ne segue che anche nella retta $OA \equiv OA'$ esistono infinite coppie di punti corrispondenti (che costituiscono una proiettività).

([31]) Se M è un qualunque punto di U_{-s}, basterà osservare che alla retta PM corrisponde la retta che da P' proietta il punto comune alla stessa PM e ad $U_{-(s+1)}$, onde M' appartiene ad $U'_{-s} \equiv P' U_{-(s+1)}$.

([32]) Si noti che, come caso particolare, potrebbero esistere punti uniti non comuni a tutti gli $n+1$ ultraspazi dati; p. es. per $n=2$ e $l \equiv r+1$ se la retta congiungente i due centri di prospettiva incontra l' $U_{-(2l-r)} \equiv U_{-(r+2)}$ comune ad U_{-l} e U''_{-l} in un punto che sia fuori dell' $U_{-(r+3)}$ comune a tutti e tre gli ultraspazi dati.

38. Sia O un punto proprio di un ultraspazio U_{-r}; il luogo Σ dei punti di questo che hanno da O distanza eguale ad un segmento dato (finito), chiamasi *ultrasfera*; questo segmento ne è il *raggio* e O ne è il *centro*.

Dato un punto qualunque P, si considerino tutte le rette (di U_{-r}) perpendicolari alla OP nel punto P' coniugato armonico di P rispetto ai due punti comuni a questa retta e a Σ; esse costituiscono (nº 29) un ultrapiano che sarà chiamato *ultrapiano polare* di P, perchè contiene tutte le rette polari di P rispetto ai cerchi secondo cui Σ è secata dai piani passanti per la retta OP.

Viceversa dato un ultrapiano $U_{-(r+1)}$ esiste un (solo) punto P che l'ammette come ultrapiano polare, punto che si ottiene conducendo da O la perpendicolare ad esso ultrapiano, e poi trovando il coniugato armonico del piede di questa perpendicolare rispetto ai due punti in cui questa stessa retta incontra l'ultrasfera Σ. Il punto P si chiamerà *polo* di $U_{-(r+1)}$.

È poi evidente che, in particolare, se il punto P appartiene a Σ, il suo ultrapiano polare passa per esso, e viceversa; in questo caso l'ultrapiano prende anche il nome di ultrapiano *tangente* a Σ in P (questo ne è il *punto di contatto*) perchè contiene tutte le rette tangenti in P ai cerchi secondo cui Σ è secata dai piani passanti per la retta OP.

È infine da osservare che se un punto A appartiene all'ultrapiano polare di un altro punto B, questo appartiene (33) all'ultrapiano polare di A; due punti siffatti si diranno *reciproci*.

Per amor di brevità omettiamo le proposizioni analoghe a quelle dell'ordinaria polarità rispetto ad un'ipersfera.

Catania, 14 agosto 1916.

---

(33) Basta considerare il piano OAB.